

Н.Н. ТКАЧУК, НТУ “ХПИ”

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ

Запропонована математична модель і реалізація методу розв’язання задачі синтезу робочих поверхонь зубів двохпараметричних передач на прикладі циліндро-конічної передачі з рівновисокими зубами на конічному колесі. Детально описаний алгоритм синтезу робочих поверхонь зубів, заснований на кінематичному методі Литвина, і його числова адаптація.

Mathematical model and implementation of teeth's working surfaces synthesis method for two-parameter transmissions is described by the example of a cylinder-conic transmission with equidistant teeth of equal width on cylindrical wheel. Teeth's working surfaces synthesis algorithm based on Litvin kinematic and its numerical adjustment method are expounded.

Обоснование проблемы. При проектировании силовых передаточных механизмов конструктор должен последовательно решить несколько задач, обеспечивая требуемую прочность, габариты и кинематические характеристики передачи. Традиционно это достигается выбором типа зацепления, схемы передачи и конструктивных параметров. Здесь применяются стандартные машиностроительные методы расчета, разработанные на основе известных теоретических результатов и опыта нескольких поколений инженеров и конструкторов. Однако при создании новых видов механизмов такие методы оказываются неприменимы из-за того, что они рассчитаны на решение узкого класса задач. В результате возникает необходимость в новых подходах и математических моделях, как универсальных, так и специально разработанных.

Так при исследовании двухпараметрических передач, впервые предложенных Ковалюхом [1-11], потребовалось создать новые схемы решения задач синтеза и анализа. Особенностью данного типа передач является то, что в них реализуется одновременно два типа относительного движения зубчатых колес. Помимо вращательного движения они могут совершать смещение относительно друг друга без потери зацепления. При этом первоначальный контакт зубьев передачи происходит в точке, а не по линии [4-7]. Для того, чтобы обеспечить такое пространственное зацепление, необходимы зубья сложной формы, ранее не нашедшие широкого распространения. Общая методика исследования подобных зубчатых передач была предложена в работе [1] и предусматривает решение двух взаимосвязанных задач:

- синтез рабочих поверхностей зубьев,
- параметрический анализ по критериям жесткости и прочности в пространстве геометрических и силовых характеристик синтезируемой

двухпараметрической передачи.

В этой статье предложена математическая модель и реализация метода решения первой задачи на примере цилиндрико-конической передачи с равновысокими зубьями на коническом колесе. Подробно описан алгоритм синтеза рабочих поверхностей зубьев, основанный на кинематическом методе Литвина [3, 4], а также приведена его численная адаптация. Сравнение и анализ результатов позволил сделать вывод о качественном характере влияния отдельных параметров задачи на вид получаемых поверхностей и оценить точность метода.

Схема решения. При решении задачи синтеза было решено исходить из тех предположений, что форма зубьев одного из колес, передаточное отношение и закон относительного смещения зубчатых колес являются заданными. В этом случае становится возможным однозначно определить форму зубьев другого колеса и линии зацепления, соответствующие обоим независимым движениям звеньев передачи. Для этого выбрана схема решения (рис. 1), в которой реализуется кинематический метод расчета пространственных зубчатых зацеплений.



Рис. 1. Алгоритм синтеза рабочей поверхности зубьев двухпараметрической передачи

Исходными параметрами являются рабочая поверхность зуба одного из колес, параметризованная некоторыми параметрами α и θ , и закон движения колес, определяемый матрицей перехода между локальными системами координат колес, являющейся функцией параметров движения φ_1 и u .

Для цилиндро-конической передачи задается форма зуба цилиндрического колеса: $r_2(\alpha, \theta)$ – радиус-вектор точки поверхности зуба в локальной системе координат; $n_2(\alpha, \theta)$ – вектор нормали в точке зуба с параметрами α и θ .

Вращение колес определяется углом поворота конического колеса φ_1 , связанным с φ_2 , углом поворота цилиндрического колеса соотношением

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = -i_{21} = \text{const}, \quad (1)$$

что соответствует постоянному передаточному числу. Параметр u отвечает за второе независимое движение.

В точке контакта должно выполняться условие обкатки. Относительная скорость точек зубьев, находящихся в зацеплении, должна быть ортогональной общему вектору нормали касающихся поверхностей зубьев [3, 4, 6]. Поскольку одновременно возможными должны быть два разных вида движения, указанное условие эквивалентно следующему:

$$\begin{cases} n_2 \perp v_{\varphi_1}^{\text{отн}}; \\ n_2 \perp v_u^{\text{отн}}, \end{cases} \quad (2)$$

где $v_{\varphi_1}^{\text{отн}}$ и $v_u^{\text{отн}}$ – относительные скорости контактирующих точек, соответствующие вращению и сдвигу зубчатых колес, соответственно.

При фиксированных φ_1 и u это условие принимает вид системы двух нелинейных уравнений относительно α и θ , что позволяет найти их как функции параметров движения:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha(\varphi_1, u); \\ \theta = \theta(\varphi_1, u). \end{cases} \quad (3)$$

В свою очередь, с использованием соотношения (3) можно восстановить форму зуба конического колеса:

$$r_1(\varphi_1, u) = M_{12}(\varphi_1, u) r_2(\alpha(\varphi_1, u), \theta(\varphi_1, u)). \quad (4)$$

Здесь r_1 и r_2 – радиус-векторы точки контакта зубьев в локальных системах координатах первого и второго колес. При численном решении системы (3) получается конечный набор точек, а потому искомая форма рабочей поверхности зуба первого колеса в конечном счете получается в виде сетки (облака) точек.

Условие зацепления. Рассмотрим две ортогональные системы координат $O_e e_1 e_2 e_3$ и $O_f f_1 f_2 f_3$ (рис. 2) в аффинном пространстве и

некоторую точку M , координаты которой в каждой из них выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} r_i^e &= (r^e, e_i); \\ r_j^f &= (r^f, f_j). \end{aligned}$$

Радиус-векторы связаны между собой соотношением

$$\begin{aligned} r^e &= d^{ef} + r^f; \\ r^f &= d^{fe} + r^e, \end{aligned} \quad (5)$$

откуда

$$\begin{aligned} r_i^e &= (r^e, e_i) = (d^{ef}, e_i) + (r^f, f_j, e_i) = d_i^f + L_{ij}^{ef} r_j^f, \\ d_i^f &= (d^{ef}, e_i), \quad L_{ij}^{ef} = (e_i, f_j). \end{aligned}$$

В результате можем выразить компоненты одного вектора через компоненты другого:

$$\begin{aligned} r^e &= d^f + L^{ef} r^f; \\ r^f &= d^e + L^{fe} r^e. \end{aligned} \quad (6)$$

Матрицы вращения L^{ef} и L^{fe} взаимнообратные и ортогональные:

$$L^{fe} = (L^{ef})^{-1} = (L^{ef})^T. \quad (7)$$

Векторные величины d^f и d^e связаны между собой таким образом:

$$d^e = -L^{fe} d^f. \quad (8)$$

Соотношения (6) удобно записывать в однородных координатах:

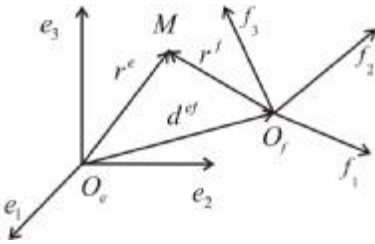


Рис. 2. Системы координат $O_e e_1 e_2 e_3$ и $O_f f_1 f_2 f_3$

$$\rho^e = \begin{pmatrix} r_1^e \\ r_2^e \\ r_3^e \\ 1 \end{pmatrix}, \rho^f = \begin{pmatrix} r_1^f \\ r_2^f \\ r_3^f \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Они тогда принимают следующий вид:

$$\rho^e = M^{ef} \rho^f; \rho^f = M^{fe} \rho^e, \quad (10)$$

где M^{ef} и M^{fe} – матрицы взаимного перехода для однородных координат:

$$M^{ef} = \begin{pmatrix} L^{ef} & d^f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M^{fe} = \begin{pmatrix} L^{fe} & d^e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

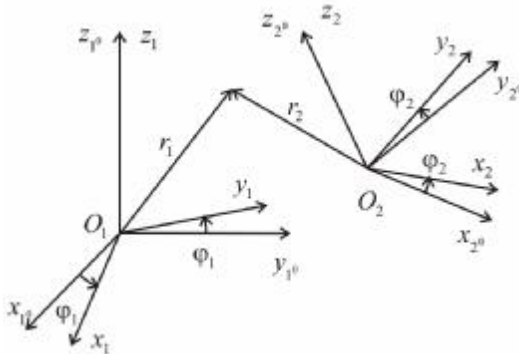


Рис. 3. Системы координат звеньев передачи

Приведенные выше соотношения используются для описания движения зубчатых колес и записи связи между координатами точек в локальных системах координат. Вводятся четыре системы координат (рис. 3). Локальные системы колес $O_i x_i y_i z_i$ вращаются вместе с ними, координаты точек зубьев в этих системах не меняются. Системы $O_i x_{i0} y_{i0} z_{i0}$ соответствуют фиксированному положению звеньев при некотором значении параметра u . Угол между осями x_{i0} и y_{i0} и соответствующими осями локальной системы координат равен углу поворота колеса φ_i . Таким образом взаимное движение колес разделяется на перемещение осей вращения и центров звеньев, определяемое параметром u , и вращение вокруг осей z_{i0} с угловыми скоростями, связанными передаточным соотношением (1).

Рассмотрим точку зацепления звеньев 1 и 2 и соответствующие ей точки на поверхности звеньев с радиус-векторами r_1 и r_2 . Компоненты однородных координат этих точек связаны следующим образом:

$$\rho_2 = M_{21}\rho_1, \quad (12)$$

где

$$M_{21} = M_{22^0}(\Phi_2)M_{2^0 1^0}(u)M_{1^0 1}(\Phi_1). \quad (13)$$

Чтобы определить относительную скорость точек звеньев в месте контакта, вводится произвольная неподвижная система координат, которой отвечает индекс s . M_{s1} и M_{s2} определяют переход от локальных координат к введенным глобальным. При этом

$$\begin{aligned} \rho_1^s &= M_{s1}\rho_1 \Rightarrow v_1^s = \frac{d}{dt}\rho_1^s = \frac{d}{dt}M_{s1}\rho_1; \\ \rho_2^s &= M_{s2}\rho_2 \Rightarrow v_2^s = \frac{d}{dt}\rho_2^s = \frac{d}{dt}M_{s2}\rho_2. \end{aligned} \quad (14)$$

В качестве t может выступать как время, так и другой параметр движения, в частности, Φ_1 или u . С учетом того, что

$$M_{s1} = M_{s2}M_{21},$$

определяется относительная скорость точек, находящихся в зацеплении, в неподвижной системе координат:

$$\begin{aligned} v_{omn}^s &= v_1^s - v_2^s = \frac{d}{dt}M_{s1}\rho_1 - \frac{d}{dt}M_{s2}\rho_2 = \\ &= \frac{d}{dt}M_{s2}M_{21}\rho_1 + M_{s2}\frac{d}{dt}M_{21}\rho_1 - \frac{d}{dt}M_{s2}\rho_2 = M_{s2}\frac{d}{dt}M_{21}\rho_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, в системе координат второго звена относительная скорость принимает следующее значение:

$$v_2^{omn} = \frac{d}{dt}M_{21}\rho_1. \quad (16)$$

Для того, чтобы движение звеньев передачи происходило свободно в области параметров Φ_1 , u , необходимо, чтобы условие зацепления выполнялось для всех возможных перемещений, определяемых этими параметрами. Для каждого из них в отдельности условие $v^{omn} \perp n$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
n_2^T \frac{\partial M_{21}}{\partial \varphi_1} \rho_1 &= 0; \\
n_2^T \frac{\partial M_{21}}{\partial u} \rho_1 &= 0.
\end{aligned}
\tag{17}$$

Здесь n_2 – вектор, первые три компоненты которого равны компонентам вектора общей нормали в локальной системе координат второго звена, а четвертая – нулю. Соответственно, значение этого вектора определяется параметрами поверхности зуба второго колеса α и θ : $n_2 = n_2(\alpha, \theta)$. Помимо этого следует учесть, что $\rho_1 = M_{21}\rho_2$. Вместе с отношениями (17) это позволяет записать условие зацепления в точке зуба $\rho_2(\alpha, \theta)$ в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned}
n_2^T(\alpha, \theta) \frac{\partial M_{21}(\varphi_1, u)}{\partial \varphi_1} M_{12}(\varphi_1, u) \rho_2(\alpha, \theta) &= 0; \\
n_2^T(\alpha, \theta) \frac{\partial M_{21}(\varphi_1, u)}{\partial u} M_{12}(\varphi_1, u) \rho_2(\alpha, \theta) &= 0.
\end{aligned}
\tag{18}$$

С учетом (13) и (1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{21}(\varphi_1, u)}{\partial \varphi_1} &= -i_{21} M'_{22^0}(\varphi_2) M_{2^0 1^0}(u) M_{1^0 1}(\varphi_1) + \\
&+ M_{22^0}(\varphi_2) M_{2^0 1^0}(u) M'_{1^0 1}(\varphi_1);
\end{aligned}
\tag{19}$$

$$\frac{\partial M_{21}(\varphi_1, u)}{\partial u} = M_{22^0}(\varphi_2) M'_{2^0 1^0}(u) M_{1^0 1}(\varphi_1).$$

Матрицы вращения M_{11^0} , M_{22^0} и их производные имеют простой вид:

$$M_{ii^0} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{i^0 i} = (M_{ii^0})^T; \tag{20}$$

$$M'_{ii^0} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 & 0 \\ -\cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M'_{i^0 i} = (M'_{ii^0})^T. \tag{21}$$

Матрица перехода $M_{2^0 1^0}$ определяется сложным относительным движением конического и цилиндрического колес. Для случая цилиндро-конического зацепления предложено такое взаимное расположение [9], при котором цилиндрическое колесо размещается перпендикулярно линии зуба на коническом колесе. При этом матрица $M_{2^0 1^0}$ определяется выбором линии и радиуса конического колеса

Условие эквидистантности (линии зубьев на коническом колесе). В работах [9, 11] было предложено подчинить линии зубьев на коническом колесе условию эквидистантности, которое заключается в следующем. Расстояние по поверхности конуса между двумя соседними линиями, получающимися одна из другой вращением на угол δ , должно быть постоянным (рис. 4). Такое требование обеспечивает равную высоту получающихся зубьев конического колеса и глубину впадин между ними. В результате зуб получается одинаково прочным и одинаково входит в зацепление с зубьями цилиндрического колеса по всей своей длине.

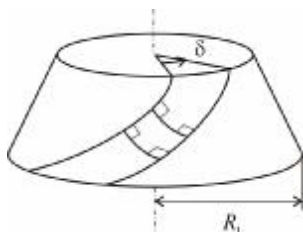


Рис. 4. Линии зубьев на коническом колесе

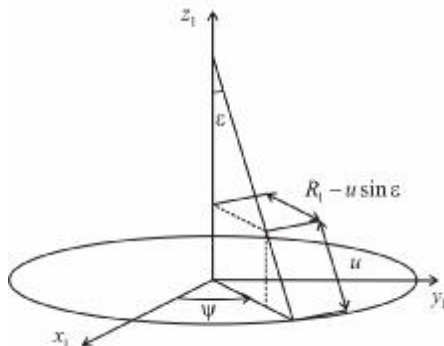


Рис. 5. Параметризация конуса

Для нахождения такой линии запараметризуем поверхность конуса и изобразим искомую линию на его развертке на плоскости. Вводим ψ и u – ортогональные координаты (см. рис. 5), для которых координатные линии являются направляющими горизонтальными окружностями и прямыми образующими соответственно. При развороте конуса прямые переходят в прямые на плоскости, пересекающиеся в точке O_k . Окружности с разрезом переходят в дуги концентрических окружностей на плоскости. При этом их длина составляет

$$2\pi(R_1 - u \sin \epsilon).$$

Раствор угла развертки равен $2\pi \sin \epsilon$. Соответственно, $\tilde{\psi} = \psi \sin \epsilon$ – угол между линией разреза и образом координатной линии ψ .

Координатные линии при разворачивании остаются ортогональными и не меняют длины. Это значит, что отображение изометрично, и на развертке все углы и длины всех кривых сохраняются. Рассмотрим одну линию зуба и соседнюю с ней (рис. 6). Выполнение условия эквидистантности этих линий на конусе эквивалентно существованию общей нормали постоянной длины для их образов на развертке. При этом повороте линии зуба на угол δ соответствует поворот ее образа на развертке вокруг точки O_k на угол $\delta \sin \varepsilon$.

Утверждение 1. Если MN (см. рис. 6) постоянно вдоль некоторой кривой, то равноотстоящая от нее кривая совпадет с ней при повороте на определенный угол.

Действительно, пусть первая кривая имеет уравнение $\psi = \psi_1(u)$, а равноотстоящая от нее вторая кривая – уравнение $\psi = \psi_2(u)$, тогда в произвольной точке M_1 первой кривой существует общая со второй кривой нормаль M_1M_2 (рис. 7). Определим точку M'_2 как пересечение первой кривой с окружностью с центром в O_k , проходящей через M_2 . Поскольку полученная точка будет принадлежать первой кривой, $M'_2N'_2 = M_1N_1$. С другой стороны, $M_1N_1 = M_2N_2$ как стороны прямоугольника. Отсюда следует, что треугольники $O_kM_2N_2$ и $O_kM'_2N'_2$ равны и поворотом на некоторый угол $\tilde{\delta}$ совмещаются, а, значит, $\beta'_2 = \beta_2$. Имеем:

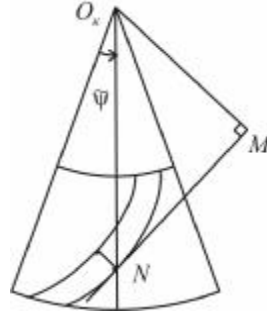


Рис. 6. Линии зубьев на развертке конуса

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \psi_2'^2 (R_1 - u \sin \varepsilon)^2}} \\ \beta_2' &= \frac{1}{\sqrt{1 + \psi_1'^2 (R_1 - u \sin \varepsilon)^2}} \end{aligned} \right|_{\beta_2' = \beta_2} \Rightarrow \psi_2'(u) = \psi_1'(u) \Rightarrow \psi_2(u) = \psi_1(u) + \tilde{\delta}. \quad (22)$$

Отсюда видно, что кривые $\psi = \psi_1(u)$, $\psi = \psi_2(u)$ действительно получаются одна из другой поворотом на $\tilde{\delta}$. Легко доказать и обратное к Утверждению 1. Таким образом, условие постоянства MN получается необходимым и достаточным для эквидистантности линий зубьев и может

быть использовано для их определения.

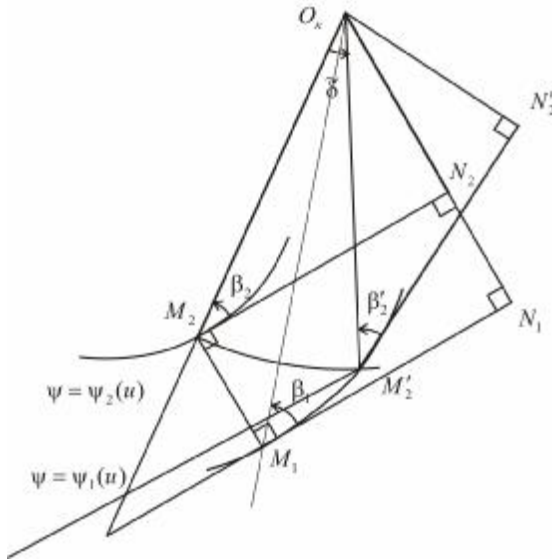


Рис. 7. Критерий эквидистантности

Итак,

$$MN = const \Leftrightarrow \cos \beta_i (R_i - u \sin \epsilon) = \cos \beta R_1, \quad (23)$$

где $\beta = \beta_i(0)$ – угол между касательной к линии зуба и образующей конического колеса в начальной точке зуба.

Отсюда с учетом

$$\cos \beta_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \psi'^2 (R_i - u \sin \epsilon)^2}} \quad (24)$$

получаем, что

$$\psi'^2 = \frac{1}{R_1^2 \cos^2 \beta} \left[1 - \frac{R_1^2 \cos^2 \beta}{(R_1 - u \sin \epsilon)^2} \right]. \quad (25)$$

В случае закручивания зуба против часовой стрелки приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно ψ :

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{1}{R_1 \cos \beta} \sqrt{1 - \frac{R_1^2 \cos^2 \beta}{(R_1 - u \sin \epsilon)^2}}, \quad (26)$$

интегрируя которое, находим следующее общее решение:

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sin \varepsilon} \left[\arctg \left(\sqrt{\left(\frac{R_1 - u \sin \varepsilon}{R_1 \cos \beta} \right)^2} - 1 \right) - \sqrt{\left(\frac{R_1 - u \sin \varepsilon}{R_1 \cos \beta} \right)^2} - 1 \right] + C, \quad (27)$$

где C – некоторая константа. Отсюда

$$\cos \beta_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \psi'^2 (R_1 - u \sin \varepsilon)^2}} = \frac{R_1 \cos \beta}{R_1 - u \sin \varepsilon}. \quad (28)$$

В дальнейшем будет использоваться одно из следующих представлений частного решения с начальным условием $\Psi(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \frac{1}{\sin \varepsilon} [\beta_i - tg(\beta_i)] - \frac{1}{\sin \varepsilon} [\beta - tg(\beta)] = \\ &= \frac{1}{\sin \varepsilon} \left[\arctg \left(\sqrt{\left(\frac{R_1 - u \sin \varepsilon}{R_1 \cos \beta} \right)^2} - 1 \right) - \sqrt{\left(\frac{R_1 - u \sin \varepsilon}{R_1 \cos \beta} \right)^2} - 1 \right] - \frac{1}{\sin \varepsilon} [\beta - tg(\beta)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Выбранная ветвь решения обрывается в точке, где значение $\cos \beta_i$ достигает единицы:

$$\cos \beta_i = 1 \Leftrightarrow R_1 \cos \beta = R_1 - u \sin \varepsilon \Rightarrow u^{\max} = R_1 \frac{1 - \cos \beta}{\sin \varepsilon}. \quad (30)$$

Теперь с помощью найденной формы зуба можно задать относительное расположение осей звеньев передачи и построить матрицу перехода $M_{2^0 1^0}$.

Взаимное расположение осей колес передачи. Положение осей $O_1 x_{1^0} y_{1^0} z_{1^0}$ и $O_2 x_{2^0} y_{2^0} z_{2^0}$ определяется параметром u . По нему выбирается точка на линии зуба конического колеса. Центр системы координат цилиндрического колеса O_2 располагается по нормали на удалении R_2 от выбранной точки. Ось $O_2 x_{2^0}$ направлена к точке линии зуба, ось $O_2 z_{2^0}$, относительно которой цилиндрическое колесо совершает вращение, параллельна касательной к линии зуба. Ось $O_2 y_{2^0}$ выбирается таким образом, чтобы орты системы образовывали правую тройку (рис.8). При таком определении

$$\bullet \quad O_2 x_{2^0} \parallel n : \quad O_2 x_{2^0} = -n(u, \psi), \quad (31)$$

$$\bullet \quad O_2 z_{2^0} \parallel \tau_t : \quad O_2 z_{2^0} = \cos \beta_i \tau_u + \sin \beta_i \tau_\psi, \quad (32)$$

$$\bullet \quad O_2 y_{2^0} \perp O_2^0 x_{2^0}, O_2^0 z_{2^0} : \quad O_2 y_{2^0} = \sin \beta_i \tau_u - \cos \beta_i \tau_\psi, \quad (33)$$

где в левых частях вторых выражений в (31)-(33) подразумеваются значения ортов.

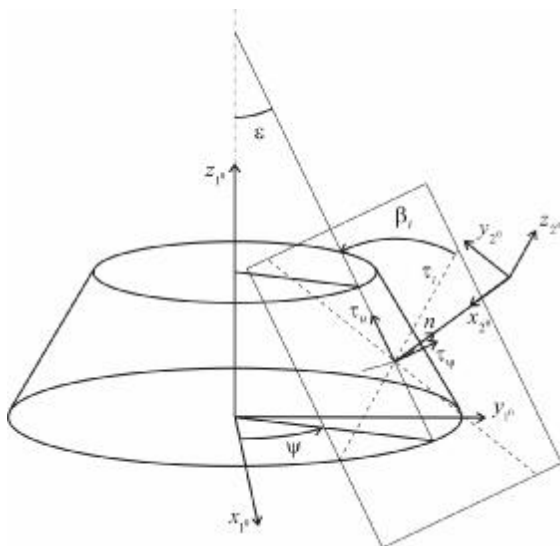


Рис. 8. Взаимное расположение осей конического и цилиндрического колес

Здесь τ_ψ и τ_u – касательные к координатным линиям конуса, n – вектор нормали к конусу в выбранной точке линии зуба. Под ψ подразумевается $\psi(u)$. Эти векторы в системе координат конического колеса имеют следующее представление:

$$n(u, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \epsilon \\ \sin \psi \cos \epsilon \\ \sin \epsilon \end{pmatrix}; \quad \tau_u = \begin{pmatrix} -\cos \psi \sin \epsilon \\ -\sin \psi \sin \epsilon \\ \cos \epsilon \end{pmatrix}; \quad \tau_\psi = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Помимо этого

$$O_1 O_2 = r(u, \psi) + R_2 n(u, \psi), \quad (35)$$

где $r(u, \psi)$ – радиус вектор точки линии зуба на конусе:

$$r(u, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi (R_1 - u \sin \epsilon) \\ \sin \psi (R_1 - u \sin \epsilon) \\ \cos \epsilon \end{pmatrix}. \quad (36)$$

В итоге, имея представление для всех трех ортов системы $O_2 x_2^0 y_2^0 z_2^0$ и

вектора O_1O_2 в системе координат $O_1x_{1^0}y_{1^0}z_{1^0}$, можем записать матрицы преобразования координат:

$$L_{2^01^0} = \begin{pmatrix} -n^T \\ \sin \beta_i \tau_u^T - \cos \beta_i \tau_\psi^T \\ \cos \beta_i \tau_u^T + \sin \beta_i \tau_\psi^T \end{pmatrix}; \quad (37)$$

$$M_{2^01^0} = \begin{pmatrix} L_{2^01^0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -O_1O_2 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{2^01^0} & -L_{2^01^0}O_1O_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Для записи системы (18) необходима производная матрицы $M_{2^01^0}$ по u . Однако у нее имеется особенность в точке $u = u^{\max}$, в которой некоторые коэффициенты матрицы $\frac{dM_{2^01^0}}{du}$ обращаются в бесконечность. Для того, чтобы этого избежать, предлагается изменить переменную дифференцирования. Так, β_i взаимно однозначно выражается через u , при этом

$$\frac{dM_{2^01^0}}{du} = \frac{dM_{2^01^0}}{d\beta_i} \frac{d\beta_i}{du}, \quad \frac{d\beta_i}{du} < 0 \text{ при } \beta_i \neq \frac{\pi}{2}. \quad (39)$$

На основании этого второе уравнение системы (18) можем заменить эквивалентным:

$$n_2^T \frac{\partial M_{21}}{\partial u} M_{12} p_2 = 0 \Leftrightarrow n_2^T \frac{\partial M_{21}}{\partial \beta_i} M_{12} p_2 = 0. \quad (40)$$

Для нахождения $\frac{dM_{2^01^0}}{d\beta_i}$ достаточно:

$$\bullet \quad \frac{d\psi}{d\beta_i} = \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 \beta_i}}{\sin \varepsilon}, \quad (41)$$

$$\bullet \quad \frac{du}{d\beta_i} = -\frac{R \cos \beta}{\sin \varepsilon} \frac{\sin \beta_i}{\cos^2 \beta_i}, \quad (42)$$

$$\bullet \quad \frac{dn}{d\beta_i} = \frac{d\psi}{d\beta_i} \cos \varepsilon \tau_\psi, \quad (43)$$

$$\bullet \quad \frac{d\tau_u}{d\beta_i} = -\frac{d\psi}{d\beta_i} \sin \varepsilon \tau_\psi, \quad \frac{d\tau_\psi}{d\beta_i} = -\frac{d\psi}{d\beta_i} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$$\bullet \quad \frac{dr}{d\beta_i} = \frac{du}{d\beta_i} \tau_u + \frac{d\psi}{d\beta_i} (R_1 - u \sin \varepsilon) \tau_\psi. \quad (45)$$

Поверхность зубьев цилиндрического колеса. В рассматриваемой цилиндро-конической передаче в качестве профиля зуба выбирается эвольвента вращения – поверхность, образованная вращением эвольвенты, лежащей в плоскости $O_2x_2y_2$, вокруг некоторой оси, находящейся в той же плоскости. Уравнение эвольвенты в плоскости и выражение для вектора нормали следующие:

$$r_{ev}(\alpha) = R_2^{ev} [\cos \alpha + \alpha \sin \alpha, \sin \alpha - \alpha \cos \alpha]; \quad (46)$$

$$n_{ev}(\alpha) = [\sin \alpha, -\cos \alpha]. \quad (47)$$

Параметр α может принимать как положительные, так и отрицательные значения (рис.9). При этом образуется лицевая и тыльная рабочие поверхности зуба на цилиндрическом колесе, через контакт с которыми передается вращение конического колеса в двух противоположных направлениях.

Точки поверхности вращения и компоненты ее нормали находятся по формулам:

$$\rho_2(\alpha, \theta) = T_{tr}^{-1} T_{rot}(\theta) T_{tr} \begin{pmatrix} r_{ev}(\alpha) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (48)$$

$$n_2(\alpha, \theta) = T_{tr}^{-1} T_{rot}(\theta) T_{tr} \begin{pmatrix} n_{ev}(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

где T_{tr} – матрица перехода к системе координат, содержащей ось вращения, а $T_{rot}(\theta)$ – матрица поворота на угол θ вокруг этой оси.

Ось в плоскости $O_2x_2y_2$, вокруг которой вращается эвольвента, может быть выбрана произвольным образом. Так, в частности, зубья на рис. 10 получены вращением вокруг осей, параллельных оси O_2x_2 и расположенных в верхней и нижней полуплоскостях для “реверсной” (тыльной) и “аверсной” (лицевой) стороны зубьев соответственно.

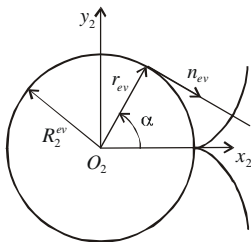


Рис. 9. “Положительная” и “отрицательная” эвольвенты



Рис. 10. Передняя и тыльная стороны зубьев на цилиндрическом колесе

Решение системы нелинейных уравнений. Измененная система уравнений (18) будет иметь вид:

$$\begin{cases} n_2^T(\alpha, \theta) N_{\varphi_1}(\varphi_1, u) \rho_2(\alpha, \theta) = 0; \\ n_2^T(\alpha, \theta) N_u(\varphi_1, u) \rho_2(\alpha, \theta) = 0. \end{cases} \quad (50)$$

Радиус-вектор ρ_2 точки поверхности зуба второго колеса и вектор нормали к поверхности зуба n_2 задаются как функции α и θ . При этом параметры на поверхности цилиндрического колеса являются искомыми, т.е. из уравнения (50) должны быть найдены те значения α и θ , при которых возможно зацепление зубьев колес в положении, определяемом фиксированными φ_1 и u . α и θ рассматриваются в пределах области $\Omega_{\alpha\theta}$, φ_1 и u варьируются в пределах $\Omega_{\varphi_1 u}$.

Предполагается, что в области $\Omega_{\varphi_1 u}$ существует подобласть $\Omega_{\varphi_1 u}^m$, в которой определены непрерывные функции $\alpha(\varphi_1, u)$, $\theta(\varphi_1, u)$, удовлетворяющие системе (50). Принадлежность точки (φ_1, u) области $\Omega_{\varphi_1 u}^m$ параметров движения, допускающих зацепление, определяется следующим образом. Каждому из уравнений системы (50) соответствует кривая в пространстве параметров α , θ . Пересечение этих кривых отвечает решениям системы при заданных φ_1 и u . При этом может оказаться, что в $\Omega_{\alpha\theta}$ пересечений нет (рис. 11, а), что означает неосуществимость зацепления. В этом случае $(\varphi_1, u) \notin \Omega_{\varphi_1 u}^m$. Те же значения, при которых

кривые в области $\Omega_{\alpha\theta}$ пересекаются в единственной точке (рис. 11, б), принадлежат искомой подобласти. Точка пересечения определяет значения искомых функций $\alpha(\varphi_1, u)$, $\theta(\varphi_1, u)$. Вместе с тем возможна ситуация, при которой имеется более одного пересечения в $\Omega_{\alpha\theta}$ (рис. 11, в). В таком случае необходимо разделить ветви решений с разными областями определения, оставив лишь одну из них.

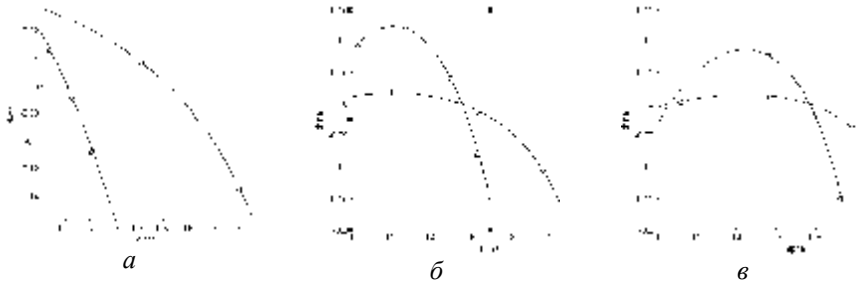


Рис. 11. Кривые корней первого и второго уравнений

Если при численном решении системы рассматривать сетку точек в области $\Omega_{\varphi, u}$:

$$\{(\varphi_1^{ij}, u^{ij})\}_{i=1, j=1}^n \subset \Omega_{\varphi, u}, \quad (51)$$

то среди них будут как те точки, для которых решение в области $\Omega_{\alpha\theta}$ не существует, так и те, для которых существует хотя бы одно решение.

Первые точки исключаются из рассмотрения, для остальных выбираются значения $\{(\alpha^{ij}, \theta^{ij})\}_{(i, j) \in I^m}$. Здесь I^m – индексы точек сетки, для которых решение существует. Для того, чтобы принять эти числа за значения искомых непрерывных функций в точках $\{(\varphi_1^{ij}, u^{ij})\}_{(i, j) \in I^m}$, необходимо, чтобы в соседних точках сетки значения α^{ij}, θ^{ij} были близкими. По этому принципу можно исключить лишние решения системы (50).

В частности, при численном решении системы итерационными методами ([8]) в качестве начального приближения для нахождения α^{ij}, θ^{ij} можно выбирать полученное ранее решение в соседней точке. В случае наличия нескольких нулей в области итерационный процесс сойдется к точке, наиболее близкой к начальному приближению. При этом все узловые значения будут принадлежать одной ветви решения системы.

Для исследуемой цилиндро-конической передачи решение системы (50) обладает той особенностью, что $\theta(\varphi_1, u) \equiv 0$ в $\Omega_{\varphi, u}^m$, а α не зависит от u . Это

значит, что при движении цилиндрического колеса вдоль линии зуба конического колеса с изменением параметра u точка контакта на зубе цилиндрического колеса не изменяется. Кроме того, углы φ_1^{ex} и φ_1^{exx} , при которых зубья передачи входят и выходят из зацепления, одинаковы для всех положений колес. Для вращения конического колеса против часовой стрелки, при котором усилие передается через контакт лицевых сторон зубьев, φ_1^{ex} и φ_1^{exx} – минимальное и максимальное значения φ_1 в области $\Omega_{\varphi,u}^m$. Ее вид в данном случае следующий:

$$\Omega_{\varphi,u}^m = [\varphi_1^{ex}, \varphi_1^{exx}] \times [0, u^{\max}] . \quad (52)$$

Коэффициент зацепления в таком случае также не будет меняться при сдвиге цилиндрического колеса и вычисляется по формуле:

$$\kappa = \frac{\varphi_1^{exx} - \varphi_1^{ex}}{2\pi / z_1} . \quad (53)$$

Синтез поверхности (зубья на коническом колесе). После численного решения системы нелинейных уравнений поверхность зуба восстанавливается по формуле (4) с подстановкой в нее узловых значений α^{ij}, θ^{ij} . На рис. 12 изображена полученная таким образом поверхность зуба с нанесенной на нее сеткой, которая состоит из линий двух типов. Одни представляют собой точки контакта при вращении передачи. Они начинаются у корня зуба и заканчиваются его вершиной. Другие тянутся вдоль линии зуба и состоят из точек, в которых касаются зубья при движении цилиндрического колеса, определяемом параметром u .

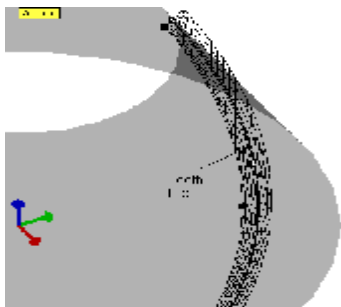


Рис. 12. Рабочая поверхность зуба конического колеса

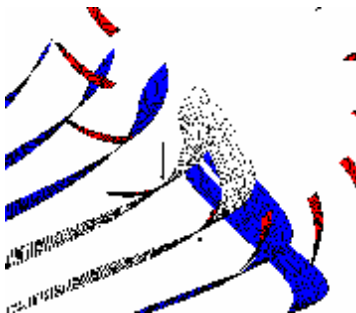


Рис. 13. Зацепление рабочих поверхностей зубьев

На рис. 13 показано, как зубья передачи входят в зацепление. Видно, что

коэффициент перекрытия оказался больше единицы, и в зацеплении находятся одновременно несколько зубьев.

Помимо передней части зуба, предложенным методом можно построить и обратную сторону зуба конического колеса (рис. 14). Как и предполагалось, зубья получились одинаковой ширины по всей длине. Ее величину можно менять. При этом с увеличением ширины зуба конического колеса, определяемом углом между линиями прямого и обратного зубьев, уменьшается толщина зуба конического колеса, который входит при зацеплении во впадину между зубьями.

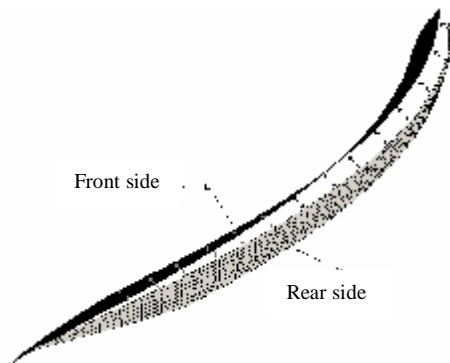


Рис. 14. Зуб конического колеса

Среди других параметров передачи, которые можно варьировать, размеры конического и цилиндрического колес, угол конусности (рис.15), начальный наклон линии зуба на коническом колесе, радиус начальной окружности эвольвенты, расположение оси вращения эвольвенты. Это позволяет в дальнейшем провести широкий параметрический анализ.

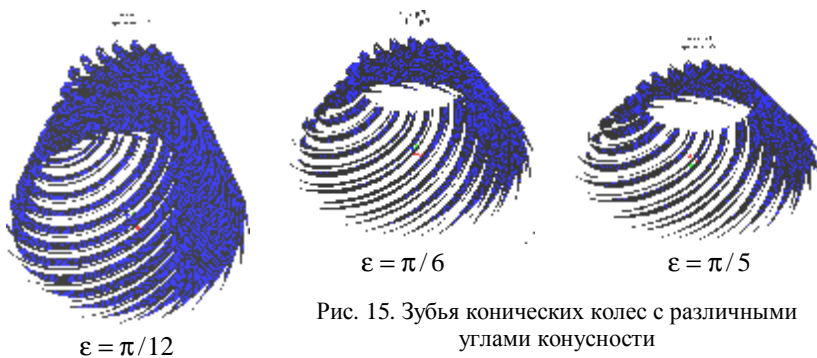


Рис. 15. Зубья конических колес с различными углами конусности

Вопрос о соотношении толщин зубьев конического и цилиндричес-

кого колес может быть приведен в качестве примера того, как правильный подбор параметров передачи может повлиять на ее прочностные и другие свойства.

Заключение. Предложенный алгоритм оказался достаточно эффективным при исследовании двухпараметрической цилиндро-конической передачи. Разработанное программное обеспечение позволяет решать задачу синтеза рабочих поверхностей зубьев передачи с высокой точностью при произвольных значениях исходных параметров. С его помощью были найдены сопряженные поверхности зубьев, исследовано их зацепление. Разработано удобное представление основных соотношений метода, принципиально не зависящее от вида зацепления.

В будущем предполагается решить следующие задачи, связанные с анализом геометрии синтезируемых передач:

- обнаружение интерференции зубьев и нахождение параметров передачи, ее исключаяющих;
- вычисление главных кривизн зубьев в точках зацепления и их направлений;
- формирование критериев рационального выбора параметров передачи.

С их решением станет возможным решение ряда прикладных задач, связанных с исследованием жесткости и прочности исследуемых передач, а также задач их параметрического анализа и синтеза.

Список литературы. 1. Ткачук Н.Н. Методы и алгоритмы синтеза формы рабочих поверхностей зубьев двухпараметрических передач // Вестник НТУ “ХПИ”. Тематический выпуск “Машиноведение и САПР”. – Харьков: НТУ “ХПИ”. – 2005. – Вып. 60. – С.137-151. **2.** Устиненко А.В. О проектировочном расчете двухпараметрических зубчатых передач на контактную выносливость // Механіка та машинобудування. – 2001. – Том №1,2. – С.45-47. **3.** Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. – Л.: 1968. – 584 с. **4.** Крылов Н.Н. Теория зацепления огибающих двухпараметрического семейства поверхностей // Известия вузов. Машиностроение, 1963. – №12. **5.** Ерихов М. Л., Грабуст Я. Е. Интерференция в зацеплениях с точечным касанием, образованных с помощью одной вспомогательной поверхности // Изв. АН Латв. ССР. Серия физических и технических наук, 1965. – Вып. 3. **6.** Ерихов М.Л., Грабуст Я.Е. Ребро возврата огибающей двухпараметрического семейства поверхностей // Изв. АН Латв. ССР. Серия физических и технических наук. – 1965. – Вып. **7.** Ерихов М. Л. К вопросу о синтезе зацеплений с точечным касанием. – В сб. “Теория передач в машинах”. – М.: Машиностроение, 1966. **8.** Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений. – М.: Мир, 1985. – 264 с. **9.** Ковалюх В.Р. Синтез зубчатых передач на основе колес с равновысокоширокими зубьями и впадинами: Дисс. канд. техн. наук // Харьков, 1982. – 156 с. **10.** Ковалюх В.Р., Тернюк Н.Э. Методы обработки зубчатых колес двухпараметрических передач. – Производственно-технический бюллетень, 1981. – №6. – С.26-27. **11.** А.с. СССР №1128025, МКИ⁴ F16H3/42. Способ передачи вращения в цилиндрикоконической зубчатой передаче и цилиндрикоконическая зубчатая передача.

Поступила в редколлегию 12.12.2005